

Quadratische Funktionen

Eine **quadratische Funktion** kann man in folgenden Formen angeben:

Allgemeine Form

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

Scheitelform

$$y = a \cdot (x - d)^2 + e$$

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.

An der allgemeinen Form kann man den Streckfaktor a der Parabel ablesen, aber nicht den Scheitel $S(d|e)$. Dies gelingt mithilfe der folgenden Überlegung.

Gegeben ist $f(x) = x^2 - 3x + 3$ (blaue Parabel).

Diese Parabel wird um -3 in y -Richtung verschoben, damit sie durch den Ursprung verläuft. Man erhält die rote Parabel mit der Gleichung $f(x) = x^2 - 3x$.

Diese rote Parabel schneidet die x -Achse an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

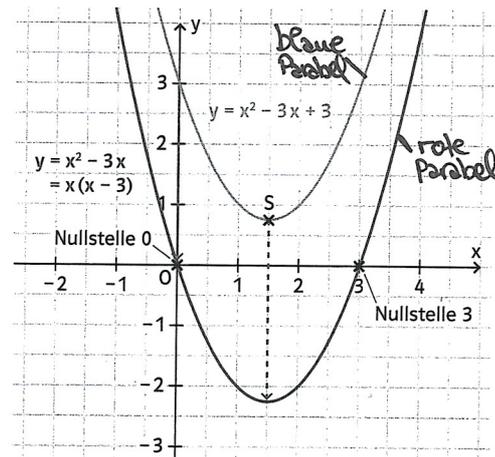
Diese Stellen heißen **Nullstellen** der quadratischen Funktion mit der Vorschrift

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Zur rechnerischen Ermittlung der Nullstellen klammert man aus:

$$f(x) = x^2 - 3x = x \cdot (x - 3).$$

Da $x \cdot (x - 3)$ ein Produkt ist, erhält man für den Wert 0 nur, wenn $x = 0$ ist oder wenn $(x - 3) = 0$, d.h. $x = 3$ ist.



Bestimmung des Scheitels S der blauen Parabel:

Der x -Wert des Scheitels S ist der Mittelwert der Nullstellen 0 und 3 , also $1,5$.

Der Scheitel S liegt auf der blauen Parabel, also gilt für den y -Wert:

$$y = 1,5^2 - 3 \cdot 1,5 + 3 = 0,75. \text{ Ergebnis: Die blaue Parabel hat den Scheitel } S(1,5 | 0,75).$$

Zur Berechnung der Nullstellen wurde folgender Satz verwendet:

Satz vom Nullprodukt: Ein Produkt ist null, wenn mindestens ein Faktor null ist.

Beispiel Den Satz vom Nullprodukt anwenden

Bestimme die Nullstellen der Funktion mit der Vorschrift $y = 2x^2 - 5x$.

Lösung

$$2x^2 - 5x = x(2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } 2x - 5 = 0 \text{ bzw. } x = 2,5$$

Nullstellen sind $x_1 = 0$ und $x_2 = 2,5$.

Aufgaben

1 Bestimme die Nullstellen der quadratischen Funktion.

a) $y = x^2 - 6x$

b) $y = x^2 + 10x$

c) $y = 2x^2 - 8x$

d) $y = 3x^2 + 9x$

e) $y = 2x^2 + x$

f) $y = 5x^2 - x$

g) $y = 0,5x^2 - 2x$

h) $y = 0,2x^2 + 6x$

2 Bestimme zunächst die Schnittstellen der Parabel mit der x -Achse und dann den Scheitel.

a) $y = x^2 - 10x$

b) $y = x^2 + 8x$

c) $y = x^2 - 14x$

d) $y = x^2 + x$

3 Bestimme den Scheitel S der Parabel. Gib die Parabel in der Scheitelform an.

a) $y = x^2 + 6x + 10$

b) $y = x^2 + 10x + 5$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = x^2 - x + 3$

e) $y = x^2 + 2x + 1$

f) $y = x^2 - 3x - 1$

g) $y = x^2 + x + 2$

h) $y = x^2 - x + 6$

Quelle: Lambacher Schweizer 8. Mathematik für Gymnasien.