Rotationskörper mit Parameter

Der Graph der Funktion f_c rotiert über dem Intervall $[0; 1]$ um die x-Achse. Für welchen Wert von c beträgt das Volumen des entstehenden Rotationskörpers $1\,\text{cm}^3$? Die Längeneinheit ist 1 cm.

a) $f_c(x) = c \cdot \sqrt{\sin(\pi x)}$

b) $f_c(x) = \sqrt{c} \cdot e^{cx},\ c > 0$

c) $f_c(x) = cx(x-1)$

d) $f_c(x) = \sqrt{c \cdot \sin(cx)},\ 0 < c < \pi$

e) $f_c(x) = \sqrt{\frac{c}{cx+1}},\ c > 0$

f) $f_c(x) = \frac{1}{cx+1},\ c > 0$

Integralfunktion als Stammfunktion (1)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Zu einer reellen Zahl u ist J_u mit $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ die Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

a) Geben Sie das Monotonieverhalten der Funktion J_u an.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen von J_u.

c) Geben Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von J_u an.

d) Betrachten Sie die Funktion g mit $g(u) = J_{-u}(u)$.

(1) Veranschaulichen Sie die Bedeutung der Funktion g anhand einer Skizze.

(2) Begründen Sie, dass g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend ist.

(3) Begründen Sie, dass der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

(4) Beweisen Sie, dass $g(u) \le 4$ für alle $u > 1$ gilt.

Integralfunktion als Stammfunktion

a) Wegen $J_u'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ ist J_u streng monoton wachsend.

b) Nullstellen:

Es ist $J_u(u) = \int_u^u \frac{1}{t^2+1}dt = 0$, $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}dt > 0$ für $x > u$ $\left(\text{denn } \frac{1}{t^2+1} > 0\right)$ und $J_u(x) = \int_u^x \frac{1}{t^2+1}dt < 0$ für $x < u$.

Daher ist u die einzige Nullstelle von J_u.

Extremstellen:

Es ist $J_u'(x) = f(x) = \frac{1}{x^2+1} > 0$ für alle x. Also hat J_u keine Extremstelle.

Wendestellen:

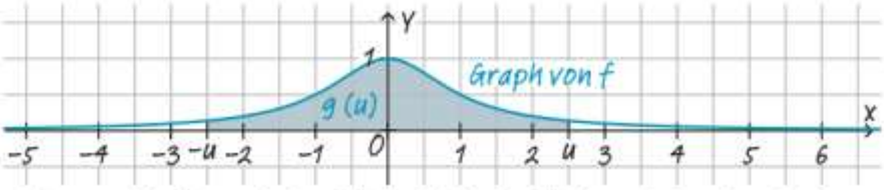
Die Funktion f hat bei $x = 0$ ein Maximum, da der Nenner für $x = 0$ minimal wird. Dies ist einzige Extremstelle von f. Also ist $x = 0$ die einzige Wendestelle von J_u.

c) Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ für $x < 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x < 0$ eine Linkskurve.

Wegen $J_u''(x) = f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0$ für $x > 0$ beschreibt der Graph von J_u für $x > 0$ eine Rechtskurve.

d)

(1)



(2) g(u) entspricht für $u > 0$ dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse über dem Intervall $[-u; u]$. Da diese Fläche oberhalb der x-Achse liegt, nimmt der Flächeninhalt für wachsendes u $(u > 0)$ zu. Damit ist die Funktion g auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend.

(3) $g(-u) = \int_u^{-u} \frac{1}{t^2+1}dt = -\int_{-u}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt = -g(u)$. Also ist der Graph von g punktsymmetrisch zum Ursprung.

(4) Es gilt $\frac{1}{t^2+1} \le \frac{1}{t^2}$ für $|t| \ge 1$ und $\frac{1}{t^2+1} \le 1$ für $|t| \le 1$.

Für $u > 1$ ergibt sich daher

$$g(u) = \int_{-u}^{u} \frac{1}{t^2+1}dt = 2 \cdot \int_0^u \frac{1}{t^2+1}dt = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt + 2 \cdot \int_1^u \frac{1}{t^2+1}dt \le 2 \cdot \int_0^1 1\,dt + 2 \cdot \int_1^u \frac{1}{t^2}dt = 2 + 2 \cdot \left[-\frac{1}{t}\right]_1^u = 4 - \frac{2}{u} \le 4.$$

Rotationskörper mit Parameter

a) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c^2 \cdot \sin(\pi x) dx = \pi c^2 \cdot \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^1 = 2c^2$

Für $c = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0{,}707$ gilt $V = 1$.

b) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c \cdot e^{2cx} dx = \pi c \cdot \left[\frac{1}{2c} \cdot e^{2cx}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (e^{2c} - 1)$

Für $c = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{\pi} + 1\right) \approx 0{,}246$ gilt $V = 1$.

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 c^2 x^2 (1 - x)^2 dx = \pi c^2 \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \pi c^2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{\pi}{30} \cdot c^2$

Für $c = \sqrt{\frac{30}{\pi}} \approx 3{,}090$ gilt $V = 1$.

d) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi c \cdot \int_0^1 \sin(cx) dx = \pi c \cdot \left[-\frac{1}{c}\cos(cx)\right]_0^1 = \pi \cdot (1 - \cos(c))$

Für $c = \arccos\left(1 - \frac{1}{\pi}\right) \approx 0{,}821$ gilt $V = 1$.

e) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{c}{cx + 1}\right) dx = \pi \cdot [\ln(cx + 1)]_0^1 = \pi \cdot \ln(c + 1)$

Für $c = e^{\frac{1}{\pi}} - 1 \approx 0{,}375$ gilt $V = 1$.

f) $V = \pi \cdot \int_0^1 (f_c(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{cx + 1}\right)^2 dx = \frac{\pi}{c} \cdot [-(cx + 1)^{-1}]_0^1 = \frac{\pi}{c} \cdot \left(1 - \frac{1}{c + 1}\right)$

Für $c = \pi - 1 \approx 2{,}142$ gilt $V = 1$.