Lösungen zu „Wiederholung Vektoren Klasse 10“

Training: Punkte im Raum – Lösungen

1

- A(0|−2|0) — liegt auf der x_2-Achse.
- B(7|1|0) — liegt in der x_1x_2-Ebene und nicht auf einer Achse.
- C(0|−4|3) — liegt in der x_2x_3-Ebene und nicht auf einer Achse.
- D(0|0|7) — liegt auf der x_3-Achse.
- E(−3|0|0) — liegt auf der x_1-Achse.
- F(5|0|2) — liegt in der x_1x_3-Ebene und nicht auf einer Achse.

2

a) A(4|3|−2), B(7|3|2) $M\left(\frac{7+4}{2}\middle|\frac{3+3}{2}\middle|\frac{2+(-2)}{2}\right)$ bzw. M(5,5|3|0) $d=\sqrt{(7-4)^2+(3-3)^2+(2-(-2))^2}=5$

b) A(−2|1|0), B(4|8|−6) M(1|4,5|−3) $d=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$

c) A(5|2|−6), B(1|1|2) M(3|1,5|−2) d = 9

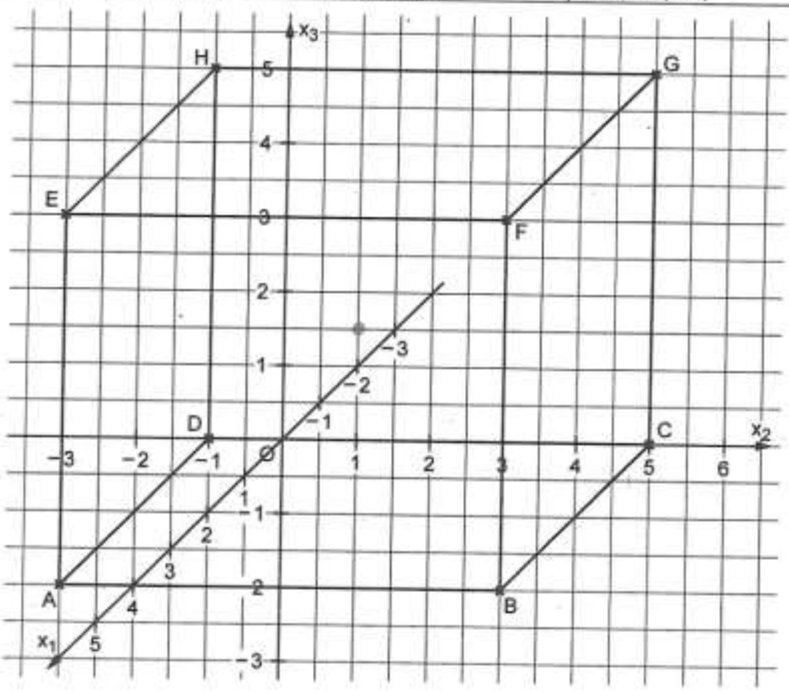
d) A(−4|−4|1), B(0|4|2) M(−2|0|1,5) d = 9

3

	x_1x_2-Ebene	x_1x_3-Ebene	x_2x_3-Ebene	Koordinatenursprung
A(1|2|3)	A(1|2|−3)	A(1|−2|3)	A(−1|2|3)	A(−1|−2|−3)
B(6|0|−4)	B(6|0|4)	B(6|0|−4)	B(−6|0|−4)	B(−6|0|4)
C(6|4|-2)	C(6|4|2)	C(6|−4|−2)	C(−6|4|−2)	C(−6|−4|2)
D(−5|2|6)	D(−5|2|−6)	D(−5|−2|6)	D(5|2|6)	D(5|−2|−6)

4

a) Siehe rechts.



b) B(2|4|−1), C(−2|4|−1), D(−2|−2|−1), E(2|−2|4), F(2|4|4), H(−2|−2|4)

c) $l=\overline{AB}=6$

$b=\overline{BC}=4$

$h=\overline{BF}=5$

$V=l\cdot b\cdot h=6\cdot 4\cdot 5=120$

d) M(0|1|1,5)

e) Abstand d der Punkte A und G: $d=\sqrt{4^2+6^2+5^2}=\sqrt{77}\approx 8,8$

(+) M von $\overline{AG}$:

$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2+(-2)\\-2+4\\-1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1,5\end{pmatrix}$

Autor: Arne Jessen

Lösungen zu „Wiederholung Vektoren Klasse 10“

Training: Vektoren – Lösungen

1 a) A(0|2|3), B(5|−4|6), $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) A(−8|6|2), B(−5|7|0), $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) A(−7|0|5), B(−6|1|7), $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) A(6|3|0), B(−2|3|4), $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2 a) A(1|0|−6), B(4|−5|−4)   b) A(4|1|0), B(7|−4|2)   c) A(0|5|−4), B(3|0|−2)
d) A(3|4|−5), B(6|−1|−3)   e) A(−9|0|4), B(−6|−5|6)   f) A(−6|5|4), B(−3|0|6)

3 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, Q(4|1|0)   b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ -11 \\ 10 \end{pmatrix}$, Q(−8|−4|11)   c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$, Q(2|15|−10)

4 $\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9} < \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{10} < \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{14} < \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{20} < \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25} < \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26}$

5 a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$: Das Viereck ABCD ist ein Parallelogramm.

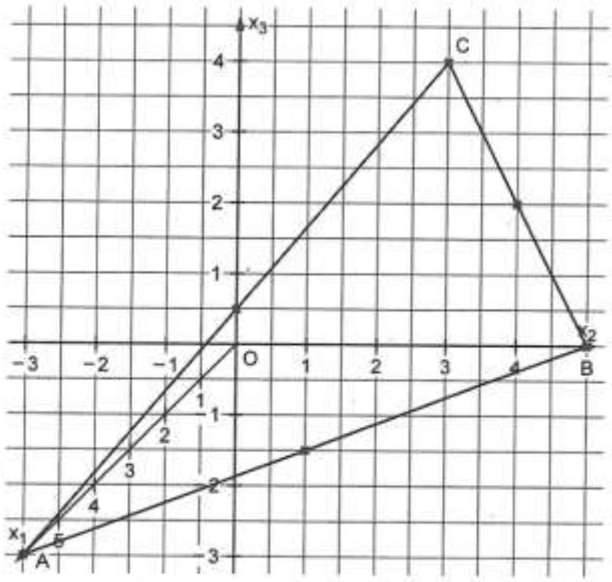
b) $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$. Das Viereck ABCD ist kein Parallelogramm.

6 a) $M_{\overline{AB}}$ (3|2,5|0), $M_{\overline{BC}}$ (0|4|2) und $M_{\overline{CA}}$ (3|1,5|2).

b) Siehe Abbildung rechts.

c) $\overrightarrow{M_{\overline{CA}}M_{\overline{BC}}} = \overrightarrow{AM_{\overline{AB}}} = \overrightarrow{M_{\overline{AB}}B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2,5 \\ -2 \end{pmatrix}$

Die drei Vektoren sind identisch.
Die Strecke $\overline{M_{\overline{CA}}M_{\overline{BC}}}$ ist parallel zur Strecke $\overline{AB}$ und halb so lang wie diese.



Lösungen zu „Wiederholung Vektoren Klasse 10“

Seite 178, Nummer 11

11 a) D(3|5|6), M(2,5|5|4,5)
b) D(7|3|2), A(9|7|−2)
c) B(11|3|−2), C(13|−1|−2)
d) A(31|3|−9), B(29|−3|0)

Seite 178, Nummer 12

12 a) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \neq \sqrt{3^2 + 8^2 + 3^2} = |\overrightarrow{DB}|$

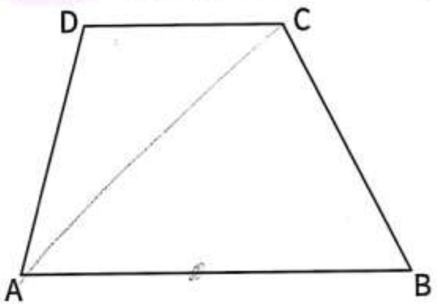
b) $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}5\\8\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$ also C(5|4|2).

Seite 179, Nummer 15

15 a) Falsch. Die Addition eines Vektors zu seinem Gegenvektor ist der Nullvektor und kann niemals eine Zahl sein.
b) Wahr, da $\vec{v} + (-\vec{v})$ der Nullvektor ist.
c) Falsch. $\left|\begin{pmatrix}7\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \neq 7 \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|$
d) Wahr. $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC})$ $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}$
e) Falsch. Wenn $\vec{v}$ mindestens eine nichtpositive Koordinate hat.

Seite 179, Nummer 19

19 a) Individuelle Lösung z. B.:



$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Ein solches Viereck heißt Trapez.
b) Für r = 1 ergibt sich ein Parallelogramm. (Bemerkung: Für alle Werte von r ergibt sich ein Trapez. Ein Parallelogramm ist ein spezielles Trapez.) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Training: Rechnen mit Vektoren – Lösungen

1 a) $\begin{pmatrix}1\\9\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\10\\7\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$ c) $-5\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\\-10\end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-9\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-2\\11\end{pmatrix}$ f) $\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\4\end{pmatrix}$

2 a) $\begin{pmatrix}2\\15\\-9\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\5\\-3\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}2\\15\\-9\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\5\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}3\\1\\-1{,}5\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}12\\4\\-6\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}4\\12\\-8\end{pmatrix}=\frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\9\\-6\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix}=-\frac{2}{5}\cdot\begin{pmatrix}15\\5\\-2{,}5\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}=\frac{5}{2}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$

3 $\overrightarrow{AB}=2\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}$

$\overrightarrow{AC}=3\vec{v}+2\vec{w}$

$\overrightarrow{AD}=-\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}$

$\overrightarrow{AE}=-\vec{u}+4\vec{v}+3\vec{w}$

$\overrightarrow{BC}=-2\vec{u}+2\vec{v}+3\vec{w}$

$\overrightarrow{CD}=-\vec{u}-2\vec{v}$

$\overrightarrow{BE}=-3\vec{u}+3\vec{v}+4\vec{w}$

4 a) $M(3|5|-1)$ b) $B(9|-4|5)$ c) $A(5|2|-5)$ d) $M(12|6|5)$

5 a) $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}=3\vec{u}$ b) $4\vec{u}+3\vec{u}-2\vec{u}=5\vec{u}$ c) $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})=2\vec{b}$

d) $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\left(4\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\vec{b}=-\vec{b}$ e) $\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}=\vec{0}$ f) $3(\vec{a}-\vec{b})+2\vec{b}=3\vec{a}-\vec{b}$

g) $\frac{3}{2}(4\vec{a}-2\vec{b})+2\vec{b}=6\vec{a}-\vec{b}$ h) $-4(2\vec{u}-3\vec{v})=-8\vec{u}+12\vec{v}$ i) $\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}=\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

Autor: Arne Jessen

Lösungen zu „Wiederholung Vektoren Klasse 10"

Training: Punkte und Vektoren – Lösungen

1 a) $A'(-5|-3|4)$ b) $B'(1|4|-5)$ c) $C'(2|-7|1)$ d) $D'(-1|-7|9)$

2 a) $A(1|9|5)$ $B(2|7|7)$ $C(-1|8|3)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3,\ |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 3,\ |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{26}.$

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig.

b) $A(7|0|-1)$ $B(10|6|6)$ $C(4|4|4)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{94},\ |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{50},\ |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{44}.$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig.

c) $A(-2|3|4)$ $B(-1|1|6)$ $C(-4|4|6)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3,\quad |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 3,\quad |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{18}.$

$|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2$. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig und gleichschenklig.

d) $A(3|-2|1)$ $B(-1|2|1)$ $C(-1|-2|5)$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32},\ |\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32},\ |\overrightarrow{BC}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{32}.$

Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

3 a) $\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = -\vec{e}.$

b) z.B. $\vec{f} = \vec{b} + \vec{c} = -\vec{a} - \vec{g} = -\vec{e} - \vec{d} = -\vec{a} + \vec{h} - \vec{d}$

c) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} + \vec{g} + \vec{h} = \vec{h}$

4 Ortsvektoren der Eckpunkte des Vierecks:

$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OD} = \vec{d}$

Ortsvektoren der Seitenmitten:

$\overrightarrow{OM_{AB}} = \overrightarrow{m_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{OM_{BC}} = \overrightarrow{m_{BC}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c},\ \overrightarrow{OM_{CD}} = \overrightarrow{m_{CD}} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d},\ \overrightarrow{OM_{DA}} = \overrightarrow{m_{DA}} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a}$

Vektoren gegenüberliegender Seiten:

$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{m_{BC}} - \overrightarrow{m_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

und $\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{m_{CD}} - \overrightarrow{m_{DA}} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

also $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

bzw. $\overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} = \overrightarrow{m_{CD}} - \overrightarrow{m_{BC}} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}$

und $\overrightarrow{M_{AB}M_{DA}} = \overrightarrow{m_{DA}} - \overrightarrow{m_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}$

also $\overrightarrow{M_{BC}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{AB}M_{DA}} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{b}$

Gegenüberliegende Seiten des Innenvierecks werden über identische Vektoren beschrieben, d. h. gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel. Das Innenviereck ist ein Parallelogramm.

$\overrightarrow{m_{AB}} = \begin{pmatrix} \frac{a_1+b_1}{2} \\ \vdots \end{pmatrix}$

Autor: Arne Jessen

Lösungen zu „Wiederholung Vektoren Klasse 10“

Training: Geraden – Lösungen

1

	t = 1	t = −3	t = 5
a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$	(3|2|−2)	(−5|2|18)	(11|2|−22)
b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	(1|−2|6)	(−3|−6|−2)	(5|2|14)
c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$	(6|2|−2)	(6|14|−10)	(6|−10|6)

2 a) A(1|1|2), B(1|2|3), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) A(3|3|3), B(0|3|4), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) A(0|0|0), B(2|5|−1), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) A(9|1|1), B(0|0|7), $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

3 a) P liegt auf g für $t = 1$.

b) P liegt auf g für $t = 3$.

c) P liegt nicht auf g.

d) P liegt auf g für $t = -\frac{3}{2}$.

4 a) P(5|0|6)

b) P(3|−9|6)

c) P(4|3|7)