Liebe G8a, ihr werdet jetzt einiges an Input bekommen, aber viele Aspekte kennt ihr schon. Da wir es uns jetzt nicht gemeinsam an der Tafel erarbeiten können, müsst ihr euch durch diese zwei Seiten selbstständig durcharbeiten. Ich habe versucht alles so aufzubereiten, dass ihr es sehr kleinschrittig erfassen könnt. Traut euch aber bitte zu fragen, wenn etwas unklar ist. Dieses Thema ist sehr sehr wichtig für den weiteren Matheunterricht. Viel Erfolg und Durchhaltevermögen, ihr schafft das!

Parabeln besitzen besondere Punkte, wie zum Beispiel den **Scheitelpunkt**. Diesen kann man mithilfe der quadratischen Ergänzung herausfinden. Das kennt ihr schon.

Beispiel:

$f(x) = 2x^2 + 12x$ **+ 10** (ausklammen des Vorfaktors von x^2)

$= 2(x^2 + 6x + 5)$ (1. Binomische Formel rückwärts und quadratische Ergänzung)

$= \underbrace{2(x + 3)^2}_{2x^2 + 12x + 18} \boxed{-8}$ (die -8 ergibt sich aus der Frage: Wie komme ich von + 18 zu +10)

Hieraus ergibt sich der Scheitel S(-3/-8), er ist direkt aus der erzeugten Scheitelpunktform ablesbar.

Wie wir auch schon gelernt haben, können Parabeln keine Nullstellen, eine Nullstelle (wenn der Scheitel auf der x-Achse liegt) und zwei Nullstellen haben. Um die **Nullstellen** zu berechnen setzten wir $f(x) = 0$, da wir so den Schnittpunkt mit der x-Achse berechnen.

Beispiel:

$f(x) = 2x^2 + 12x + 10$

$0 = 2x^2 + 12x + 10$

Wir wenden die Mitternachtsformel an, um die quadratische Gleichung zu lösen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2}$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen bei $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$ und damit $N_1(-5/0)$ und $N_2(-1/0)$.

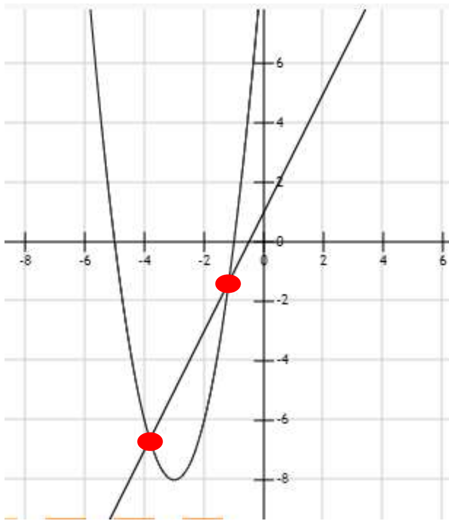
Hat eine Parabel zwei Nullstellen, so ist der Scheitelpunkt einfach zu berechnen, ohne die quadratische Ergänzung wie oben durchzuführen, da die Parabel symmetrisch ist und der Scheitel genau in der Mitte (auf der x-Achse) der Nullstellen liegen muss, da wir $x_1 = -5$ und $x_2 = -1$ erhalten haben, muss der x-Wert für den Scheitel -3 sein (Mitte von -5 und -1). Den Funktionswert an dieser Stelle erhalten wir nun, indem wir $x_s = -3$ in die Funktion einsetzen: $f(x_s) = 2 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) + 10 = -8$ Der Scheitelpunkt unsere Funktion lautet entsprechend, wie wir es auch oben schon herausgefunden haben, S(-3/-8), dieses Mal jedoch ohne quadratische Ergänzung. Viele Wege führen zum Ziel…

Oft werden aber nicht nur Nullstellen oder Scheitelpunkte von Parabeln gesucht, sondern auch Schnittpunkte einer Parabel mit einer Funktion.

Beispiel:

Gegeben seinen hierzu die Funktionen $f(x) = 2x^2 + 12x + 10$ und $g(x) = 2x + 1$

Für eine bessere Vorstellungskraft sehen wir nachfolgende die Graphen der Funktionen f(x) und g(x).



f(x) und g(x) schneiden sich in zwei Punkten, die ebenfalls eingezeichnet sind. Wie berechnet man nun diese **Schnittpunkte**? An den Schnittpunkten haben f(x) und g(x) den gleichen Funktionswert (und auch x-Wert), dementsprechend setzen wir die Funktionen gleich:

$f(x) = g(x)$

$2x^2 + 12x + 10 = 2x + 1 \qquad |-2x - 1$

$2x^2 + 10x + 9 = 0$

Nun wenden wir erneut die Mitternachtsformel an:

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{2 \cdot 2}$

Hieraus ergibt sich $x_1 \approx -1{,}18$ und $x_2 \approx -3{,}82$

Um die Schnittpunkte zu erhalten setzen wir x_1 und x_2 in eine der Funktionen g oder f ein:

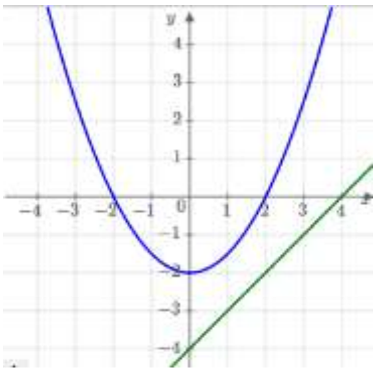
$g(-1{,}18) = 2 \cdot (-1{,}18) + 1 = -1{,}36$

$g(-3{,}28) = 2 \cdot (-3{,}28) + 1 = -6{,}64$

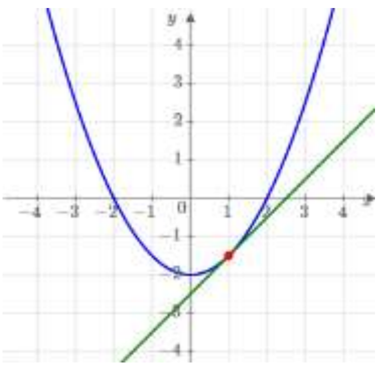
Daraus ergeben sich die Schnittpunkte $S_1(-1{,}18/-1{,}36)$ und $S_2(-3{,}28/-6{,}64)$, die man auch in der Zeichnung in Form eines nicht ganz so exakten Wertes anlesen kann.

Das war viel Input auf einmal, was haben wir nun neues gelernt, bzw. wiederholt:

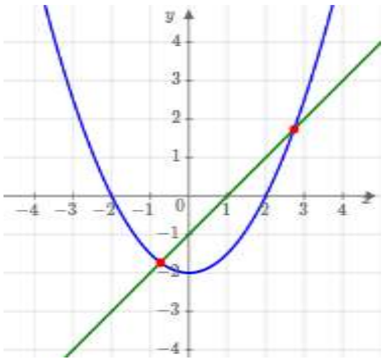
- Quadratische Ergänzung um den Scheitelpunkt einer Parabel zu bestimmen
- Nullstellen einer Parabel berechnen (f(x) = 0), es kann keine, eine oder zwei geben
- Scheitelpunkt einer Parabel aus den Nullstellen einer Parabel bestimmen (Mittelwert). Dies ist aber nur möglich, wenn die Parabel zwei Nullstellen hat. Hat die Parabel nur eine Nullstelle, ist die Nullstelle selbst der Scheitelpunkt. Hat die Parabel keine Nullstelle muss eine quadratische Ergänzung durchgeführt werden, um den Scheitelpunkt zu bestimmen.
- Schnittpunkte von Parabel und Gerade berechnen (das geht genauso mit zwei Geraden oder zwei Parabeln). Es kann auch sein, dass es keine Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden gibt. Die Gerade nennen wir dann **Passante**. Gibt es einen Schnittpunkt (es handelt sich dabei eigentlich um einen Berührpunkt), nennen wir die Gerade **Tangente** und gibt es zwei Schnittpunkte wie in unserem Beispiel handelt es sich um eine **Sekante**.



Passante



Tangente



Sekante

Quelle: Eigener Entwurf